	OC-görbe, működési jelleggörbe, elfogadási jelleggörbe	

Németül:	OC-kurve, Annahmekennlinie, OC-Funktion
Angolul:	Operating characteristic curve
Franciául:	Caractéristique de fonctionnement, courbe d'efficacité

Az OC-görbe fogalma

Az OC-görbe (nevezik működési vagy elfogadási jelleggörbének is) valamely p alulmaradási hányadú tétel A(p) elfogadási valószínűségét adja meg, ha a mintavételek n száma és a megengedett nem megfelelő minták $k_{\text{megengedett}}$ száma adott.

Annak valószínűsége, hogy az N elemű, M nem megfelelő elemet tartalmazó halmazból visszatevés nélküli reprezentatív mintavétellel nyert n elemű mintában a nem megfelelő elemek száma k, a P_k hipergeometrikus valószínűségeloszlással számítható ki:

$$P_k = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A valószínűséget pontosan leíró hipergeometrikus eloszlás esetén a visszatevés nélküli mintavétel következtében minden egyes mintaelem kivételekor megváltozik a halmaz eredeti $p = M/N$ alulmaradási hányada. A hipergeometrikus eloszlás felhasználása nehézséget jelent, hogy nagy N számok mellett a valószínűségek kiszámítása igen körülményes. Ezért azzal a közelítő feltételezéssel szokás élni, hogy a minta elemei csak az adott elem vizsgálatának idejére kerülnek ki a halmazból. Az ilyen visszatevéses reprezentatív mintavétel esetén a nem megfelelő elemek részaránya a halmazban változatlan marad, azaz $p = M/N$ = konstans (*Kausay T.* 1970). Ebben az esetben a visszatevéses mintavétel feltételezése mellett a keresett valószínűséget a könnyebben meghatározható

$$B_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

binomiális valószínűségeloszlás fejezi ki, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots n$; $0 \leq p = \leq 1{,}0$.

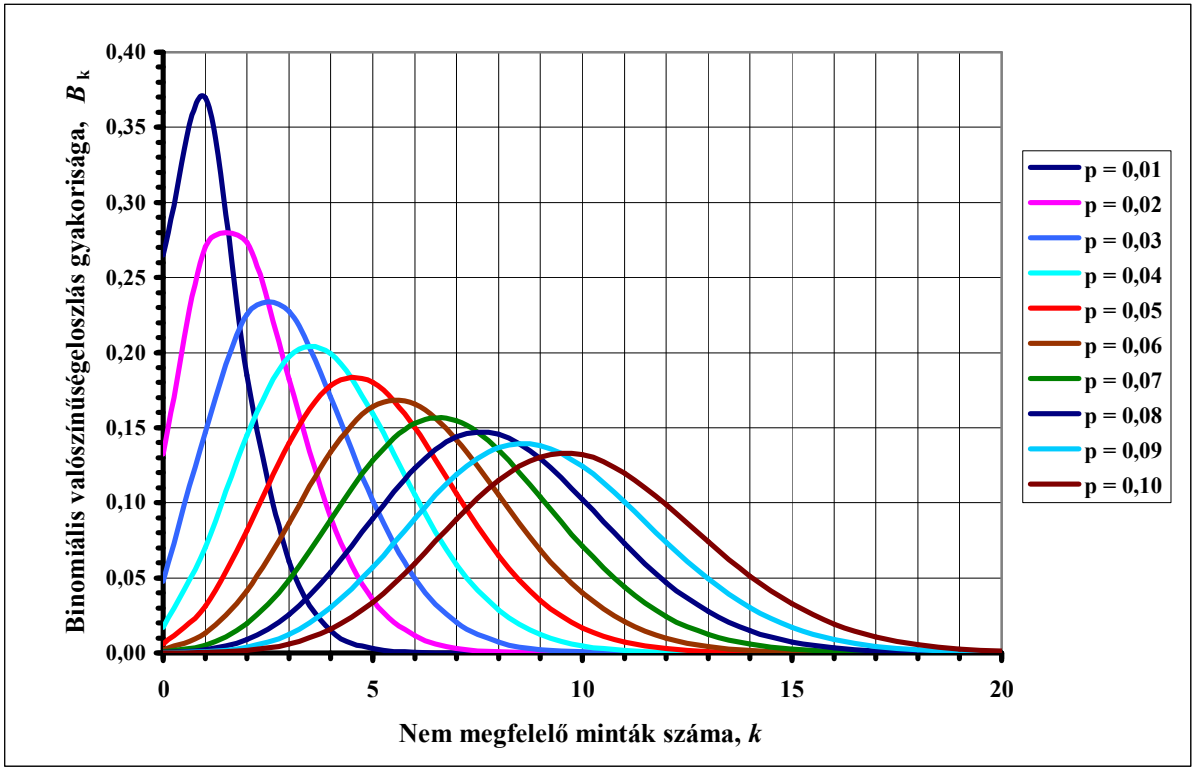
Példaként vizsgáljuk meg, mi a valószínűsége (B_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből $n = 100$ számú mintát véve a nem megfelelő minták száma k. A választ a 100-adrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvényei adják meg (*1. ábra*).

A binomiális eloszlás diszkrét eloszlás, de szemléletesség kedvéért az *1. és 2. ábrán* az egyes valószínűségeket ábrázoló pontokat összekötöttük.

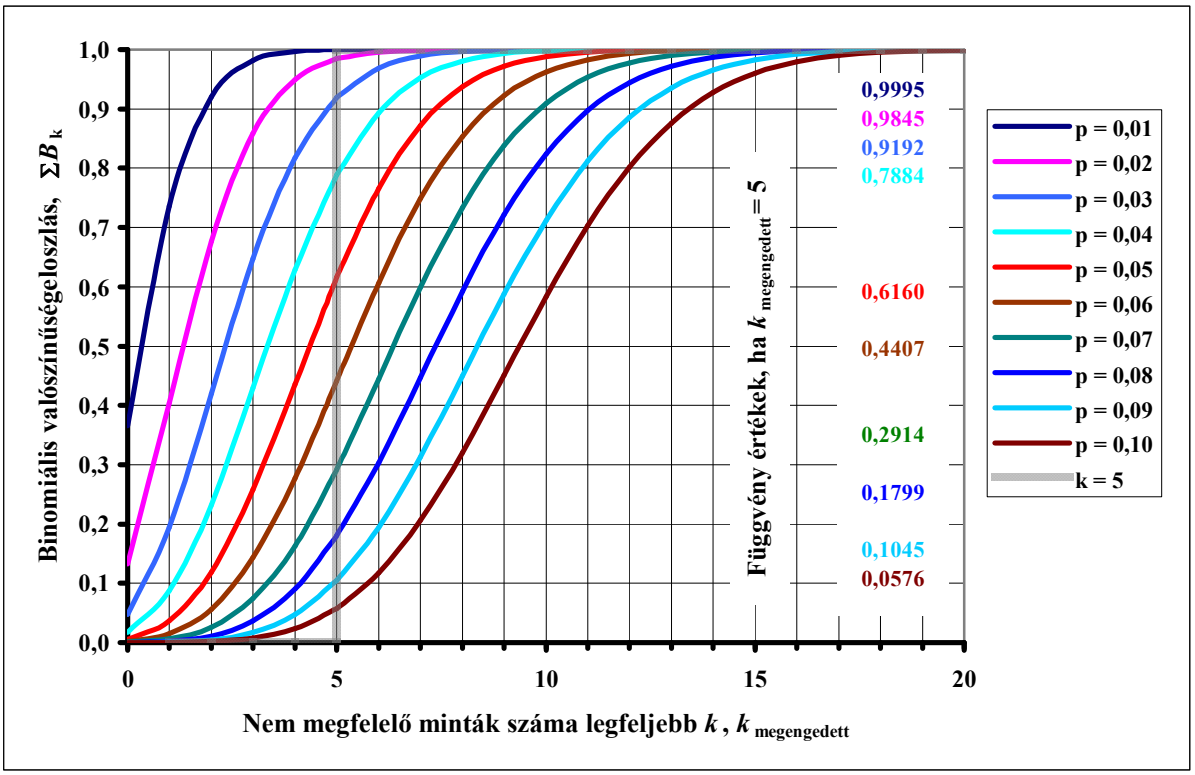
Az *1. ábrán* látni, hogy a binomiális eloszlás nem szimmetrikus, hanem egyre inkább jobbra elnyúló (jobbra egyre ferdébb), ha p értéke tart a nullához. A binomiális eloszlás a $p = 0{,}5$ értéknél szimmetrikus, és attól $p = 0{,}0$, illetve $p = 1{,}0$ felé távolodva egyre ferdébb (jobbra,

illetve balra). Ennek következménye, hogy esetünkben – lévén jobbra ferdülő eloszlás – a modusznál nagyobb a medián, és a mediánnál nagyobb a valószínűségi változók (k) számtani középérték. A modusz a legnagyobb B_k valószínűséghez tartozó valószínűségi változó (k_{modusz}), itt a gyakoriságfüggvénynek maximuma, az eloszlásfüggvénynek inflexiós pontja van. A medián az a valószínűségi változó ($k_{medián}$), amelynél az eloszlásfüggvény $\Sigma B_k = 0{,}5$ értéket vesz fel, feltéve, hogy ilyen létezik (*Vincze E.* 1972, *Vincze I.* 1958).

A binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvényeiből meghatározhatók az eloszlásfüggvények, amelyek azt fejezik ki, mi a valószínűsége (ΣB_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből példánk szerint n = 100 számú mintát véve, a nem megfelelő minták száma legfeljebb $k_{megengedett}$ (*2. ábra*).



1. ábra: Binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvénye, ha a mintavételek száma n = 100

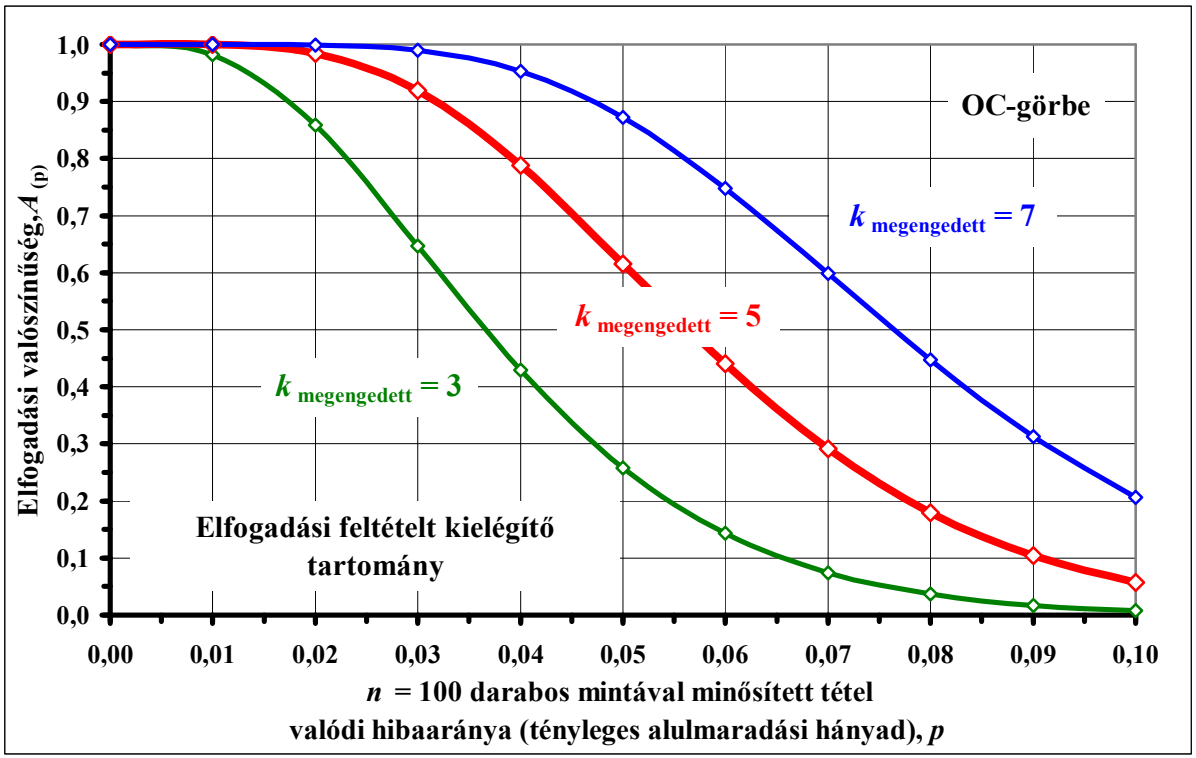


2. ábra: Binomiális valószínűségeloszlás eloszlásfüggvénye, ha a mintavételek száma n = 100

A *2. ábra* valószínűségi eloszlásfüggvényeiből leolvasható, hogy a tételből n = 100 számú mintát véve, annak a valószínűsége, hogy a nem megfelelő minták megengedett száma – mint a tétel elfogadásának feltétele – $k_{\text{megengedett}}$ = 5, például p = 0,01 alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9995, p = 0,02 alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9845, p = 0,03 alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9192 stb. A *2. ábra* $k_{\text{megengedett}}$ = 5 abszcisszájához tartozó (p, ΣB_k) értékpárokat új koordinátarendszerben ábrázolva és folyamatos vonallal összekötve, a $\Sigma B_k = A(p)$ elfogadási valószínűségeket kapjuk meg a tétel tényleges p alulmaradási hányada függvényében (*3. ábra* középső görbe). Az így megszerkesztett *3. ábra* szerinti függvényt nevezzük OC-görbének. A görbe alatti tartomány az elfogadási feltételt kielégítő esetek megjelenési helye.

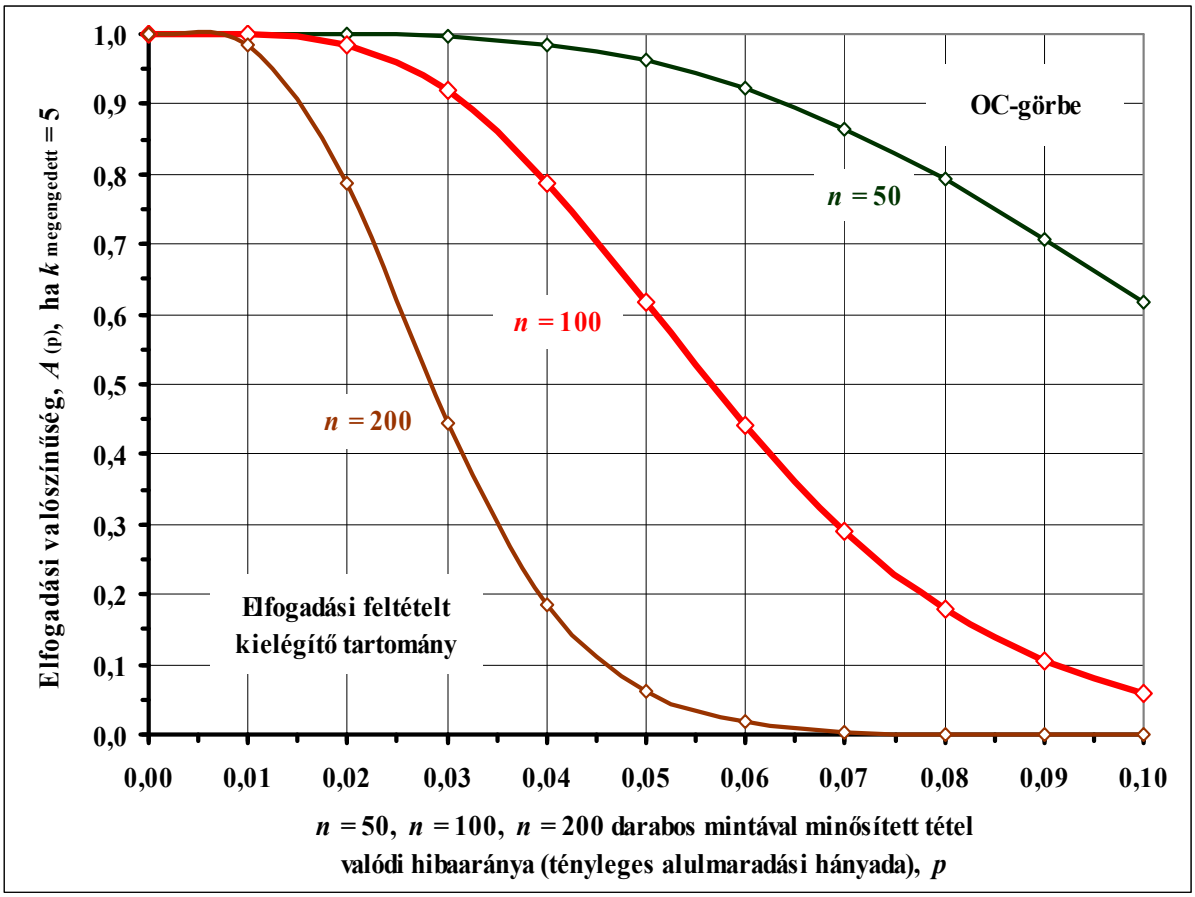
Az OC-görbéből tehát például azt olvashatjuk le, mi a valószínűsége annak, hogy a p (például 0,05) alulmaradási hányadú tételből kivett n (például 100) számú mintában a megengedett nem megfelelő minták száma legfeljebb k, azaz $k_{\text{megengedett}}$ (például 5). Ebben az esetben a tételt éppen elfogadjuk, aminek a valószínűsége a példánkban $\Sigma B_k = A(p) = 0{,}616$.

Az OC-görbét három paraméter határozza meg: a valószínűségeloszlás függvény típusa (esetünkben binomiális), amely a p, n, k változók közötti kapcsolatot fejezi ki, a mintavételek száma és a megengedett nem megfelelő minták száma. Ha adott n mintavételi szám (esetünkben n = 100) és adott p tényleges alulmaradási hányad esetén a megengedett nem megfelelő minták száma növekszik (a *3. ábrán* $k_{\text{megengedett}} = 3 \rightarrow 7$), akkor az $A(p)$ elfogadási valószínűség növekszik. Ha adott nem megfelelő minta szám (esetünkben $k_{\text{megengedett}}$ = 5) és adott p tényleges alulmaradási hányad esetén az n mintavételi szám növekszik (a *4. ábrán* $n = 50 \rightarrow 200$), akkor az $A(p)$ elfogadási valószínűség csökken.



3. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintavételek száma $n = 100$ és a megengedett nem megfelelő minták száma $k_{\text{megengedett}} = 3$, $k_{\text{megengedett}} = 5$ és $k_{\text{megengedett}} = 7$

A minták nem megfelelőségének feltétele és a megengedett nem megfelelő minták száma (részaránya) építőanyag fajtánként és szabványonként változik. Például szilárdsági szempontból nem megfelelő a beton próbatest, ha nyomószilárdsága kisebb, mint az f_{ck} előírt jellemző érték, és a megengedett nem megfelelő minták száma $n = 100$ esetből $k_{\text{megengedett}} = 5$ (MSZ 4798-1:2004); szilárdsági szempontból nem megfelelő a B500 jelű bordázott hegeszthető betonacél pálca, ha folyáshatárának jellemző értéke kisebb, mint $0{,}97 \cdot R_e = 0{,}97 \cdot 500 = 485$ N/mm^2 és szakítószilárdsága kisebb, mint $0{,}97 \cdot R_m = 0{,}97 \cdot 600 = 582$ N/mm^2, és a megengedett nem megfelelő minták száma $n = 100$ esetből $k_{\text{megengedett}} = 5$ (MSZ 339:2008.10.06. szabványjavaslat) stb.



4. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintavételek száma $n = 50$, $n = 100$ és $n = 200$, és a megengedett nem megfelelő minták száma $k_{\text{megengedett}} = 5$

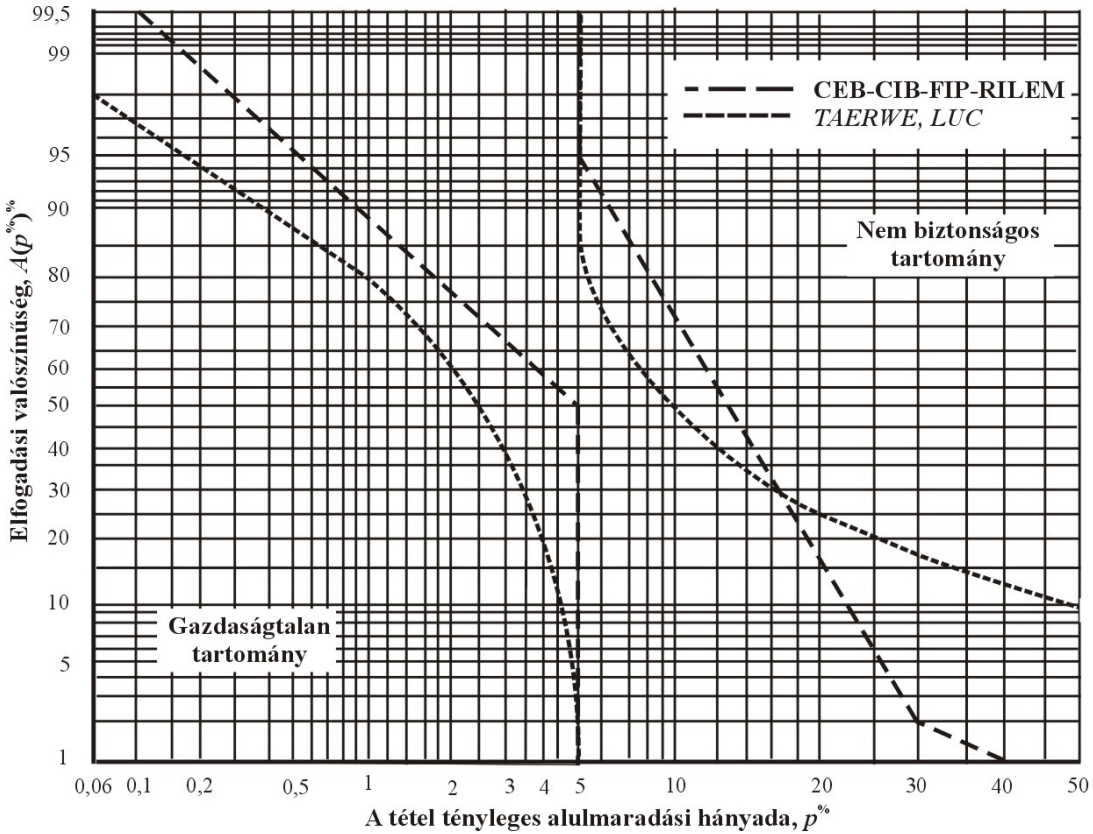
OC-görbe a beton nyomószilárdság szerinti megfelelőségének értékelésére

A CEB-CIB-FIP-RILEM munkabizottsága 1975-ben a „Recommended Principles for the Control of Quality and the Judgement of Acceptability of Concrete" című ajánlásában megadta, és 1978-ban a betonszerkezetekre vonatkozó CEB-FIP modell-kódban közzétette az OC-görbék határvonalait, amelyek a kétszeres valószínűségi koordinátarendszerben egyenesek (CEB-FIP 1978, *Palotás L.* 1979, *Windisch A. – Szalai K.* 1982, *Windisch A. – Balázs Gy.* 1983, *György L.* - MÉÁSZ ME-04.19:1995, 6.3.4.4.4. szakasz). E koordinátarendszer hasonlít a *Gauss*-papírhoz (*Gauss*-hálóhoz), ordináta tengelye a *Gauss*-féle normáleloszlás eloszlásfüggvényének inverz függvénye szerint készült, de abszcissza tengelye nem egyenletes és nem logaritmikus, hanem feltehetőleg logaritmikus normális beosztású (*5. és 6. ábra*). Az *5. és 6. ábrán* az alsó határvonal alatti terület a gazdaságtalan (túl biztonságos) megoldások tartománya, a felső határvonal feletti terület a nem biztonságos megoldások tartománya.

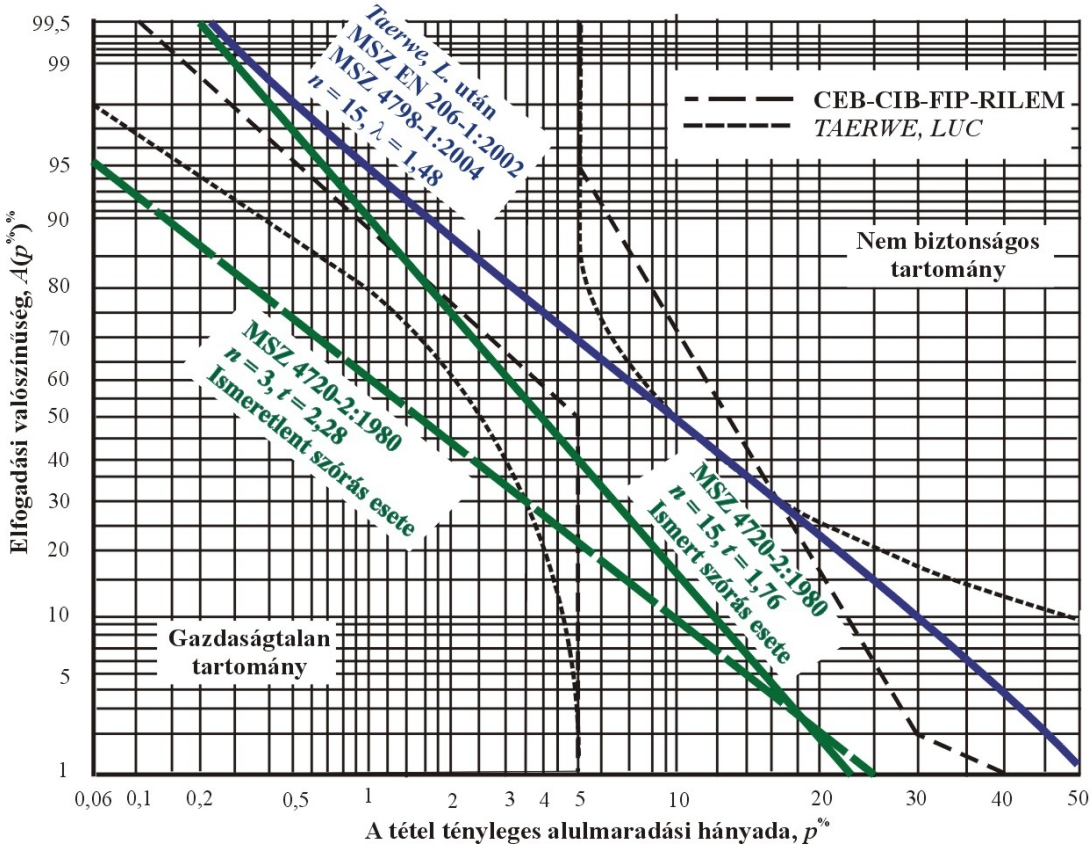
Taerwe, L. 1986-ban a CEB-FIP – transzformált koordinátarendszerben – egyenes határvonalait görbe vonalakkal helyettesítette (*5.*, illetve *6. ábra*). A felső határgörbét (a nem biztonságos tartomány határgörbéjét) úgy szerkesztette meg, hogy arra fennáll az $p \cdot A(\mathrm{p}) = 0{,}05$ egyenlőség (például $0{,}05 \cdot 1{,}0$; $0{,}1 \cdot 0{,}5$; $0{,}2 \cdot 0{,}25$; $0{,}5 \cdot 0{,}1$). Elfogadási feltételeinek OC-görbéit (transzformált koordinátarendszerben közel egyenesek) a (0,1; 0,5) koordinátájú pontban érintőlegesen a felső határgörbéhez illesztette (*6. ábra*). A *6. ábrán* feltüntetett $n = 15$, $\lambda = 1{,}48$ paraméterű *Taerwe*-féle OC-görbe a vizsgálati eredmények közötti gyenge

összefüggés (egymástól nem teljesen független eredmények) esetén érvényes. Ezt alkalmazza az MSZ EN 206-1:2002 betonszabvány a folyamatos gyártás nyomószilárdsági megfelelőségének 1. feltételeként, és átvette az MSZ 4798-1:2004 nemzeti alkalmazási dokumentum is.

A *6. ábrán* – összehasonlításul – a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány elfogadási feltételének OC-görbéjét is megrajzoltuk. Az MSZ 4720-2:1980 szabvány szilárdsági előírása azon a feltételezésen alapult, hogy a szabványos betonok variációs tényezője (a szilárdság szórása osztva az átlagos nyomószilárdsággal) 0,15, és szilárdság eloszlása a *Gauss*-féle normális eloszlásnak ❖ felel meg (MÉÁSZ ME-04.19:1995, 6.3.4.4.3. szakasz).



5. ábra: Az OC-görbék határvonalai a CEB-CIB-FIP-RILEM ajánlás szerint (MSZ 4720-2:1980) és azok *Taerwe, L.* által módosított változatai (MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004). Forrás: *Taerwe, L.* 1986



6. ábra: *Taerwe, L.* elfogadási feltételének OC-görbéje a vizsgálati eredmények közötti gyenge összefüggés esetén (forrás: *Taerwe, L.* 1986) összehasonlítva a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány ismeretlen és ismert szóráson alapuló elfogadási feltételének OC-görbéjével (forrás: MÉASZ ME-04.19:1995)

A *6. ábrán* kitűnik, hogy míg az MSZ 4720-2:1980 szabvány szerinti átadás-átvételi eljárásban n = 15 minta esetén az elfogadási-vissszautasítási valószínűség a kritikusan megfelelő betonra (alulmaradási hányad 5 %)[1] nézve közelítőleg 40-60 % volt, addig a *Taerwe*-féle OC-görbét követő MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004 szabványok szerint a folyamatos gyártás során ugyancsak n = 15 minta esetén az átadás-visszautasítás valószínűsége a kritikusan megfelelő betonnál (alulmaradási hányad 5 %) közelítőleg 70-30 % (*Kausay T.* 2006 és 2007).

Az új betonszabványokban (MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004) a folyamatos gyártás nyomószilárdsági megfelelőségének 1. feltételében szereplő, az n = 15 mintaszámhoz tartozó $\lambda_{n=15}$ = 1,48 értékű alulmaradási tényező lényegében a korábbi betonszabványban (MSZ 4720-2:1980) szereplő *Student*-tényező szerepét tölti be. A *Student*-tényező értéke (t_n) a mintaszámtól függött, értéke a korábbi betonszabványban minden esetben legalább t_∞ = 1,645 (n = ∞), de kis elemszámú minta esetén ennél lényegesen nagyobb volt. Az új betonszabványok – ezen a ponton legalábbis – egyértelműen a gyártónak kedveznek, hiszen

[1] Érdekességként megjegyezzük, hogy az 1970-es évek közepén-végén úgy tervezték, hogy a beton nyomószilárdságának jellemző értékét (küszöbszilárdságát) 2,275 %-os valószínűségi szint (alulmaradási hányad) figyelembevételével fogják meghatározni, amelyhez a *Gauss*-féle normális eloszlás estén 2·σ alulmaradási tágasság tartozik (*Bölcskei E. – Dulácska E.* 1974, *Palotás L.* 1979). Az elképzelés nem valósult meg, ugyanis az MSZ 4720-2:1980 szabványban az 5 %-os alulmaradási hányad képezte a jellemző érték számításának alapját. (Az MSZ 4720-2:1980 szabványt megelőző MSZ 4720:1961 és az abban hivatkozott MSZ 4715:1961 szabvány sem alkalmazta a 2,275 %-os valószínűségi szinten történő számítást.)

minél kisebb az $f_{ck} = f_{cm} - \lambda_n \cdot s_n$ összefüggésben a szorzóként szereplő λ_n, illetve t_n alulmaradási tényező ❖, adott átlagos nyomószilárdság (f_{cm}) és szórás (s_n) esetén annál nagyobb jellemző érték (f_{ck}) adódik. Az új és a régi betonszabványok megfelelőségi feltételrendszere alapvetően különbözik, és ez az OC-görbék eltérő elhelyezkedésében is megmutatkozik: a régi szabvány a beépített beton nyomószilárdságát egy szúrópróbaszerűen is alkalmazható megfelelőségi feltétellel biztosította, az új szabványok pedig egy folyamatos nyomon követést és utólagos javítást feltételező – de azt elő nem író – minőségbiztosítási rendszer részeként alkalmazható megfelelőségi feltétellel kívánják biztosítani. A beton valamely nyomószilárdsági osztályát az európai szabvány szerint kisebb biztonsággal, kisebb nyomószilárdságokkal lehet elérni, mint a régi MSZ 4720-2:1980, vagy akár a régi DIN 1084:1988 és DIN 1045:1988 szabvánnyal lehetett (*Zäschke, W.* 1994, *Fischer L.* 1999).

Felhasznált szabványok és irodalom

MSZ 339:2008.10.06. szabványjavaslat. Betonacélok. Melegen hengerelt betonacél, hidegen alakított betonacélhuzal, gépi hegesztéssel készített síkhálók és térbeli rácos tartók. Követelmények

MSZ 4715:1961 Megszilárdult beton vizsgálata

MSZ 4720:1961 A betonok minőségi követelményei és minősítésük

MSZ 4720-2:1980 A beton minőségének ellenőrzése. 2. rész: Általános tulajdonságok ellenőrzése

MSZ 4798-1:2004 Beton. 1. rész: Műszaki feltételek, teljesítőképesség, készítés és megfelelőség. Az MSZ EN 206-1 és alkalmazási feltételei Magyarországon

MSZ EN 206-1:2002 Beton. 1. rész: Műszaki feltételek, teljesítőképesség, készítés és megfelelőség (Módosítások: MSZ EN 206-1:2000/A1:2004 és MSZ EN 206-1:2000/A2:2005)

DIN 1084-1 és -3:1988 Überwachung (Güteüberwachung) im beton- und Stahlbetonbau. Teil 1: Beton BII auf Baustellen, Teil 3: Transportbeton

DIN 1045:1988 Beton und Stahlbeton; Bemessung und Ausführung

Bölcskei Elemér – Dulácska Endre: Statikusok könyve. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

Fischer, Lutz: Sicherheitskonzept für neue Normen. ENV und DIN-neu. Grundlagen und Hintergrundinformationen. Teil 3: Statistische Auswertung von Stichproben im eindimensionalen Fall. Bautechnik, 76. 1999. Heft 4. pp. 328-338.

György László: Az MSZ 4720 és az MSZ ENV 206 T minősítési módszereinek az összehasonlítása. MÉÁSZ ME-04.19:1995 „Beton és vasbeton készítése” című műszaki előírás (szerkesztette és írta Ujhelyi János), 6. fejezet: „Vizsgálat, minőség-ellenőrzés, minőségtanúsítás” 6.3.4.4.4. szakasza, Budapest, 1995.

International System of Unified Standard Codes of Practice for Structures, Vol. II, CEB-FIP Model Code for Concrete Structures, CEB-FIP, 1978.

Kausay Tibor: A szemcsealak minősítéses vizsgálatának mintaelemszáma. Mélyépítéstudományi Szemle. XX. évfolyam. 1970. 8. szám, pp. 373-388.

Kausay Tibor: A beton nyomószilárdságának elfogadása. Vasbetonépítés. VIII. évfolyam, 2006. 2. szám, pp. 35-44.

Kausay Tibor: Alulmaradási tényező. Fogalom-tár. Beton szakmai havilap. XV. Évfolyam, 2007. 1. szám, pp. 3-5.

Palotás László: Mérnöki szerkezetek anyagtana 1. kötet. Általános anyagismeret. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.

Taerwe, Luc: A General Basis for the Selection of Compliance Criteria (A megfelelőségi feltételek kiválasztásának általános alapja). IABSE Proceedings P-102/86. IABSE Periodica 3/1986 August.

Vincze Endre: Műszaki matematika. V. kötet. Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

Vincze István (szerkesztette): Statisztikai minőség-ellenőrzés. Az ipari minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958.

Windisch Andor: Valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapismeretek. Szalai Kálmán „A beton minőségellenőrzése” című könyvének 3. fejezete. Szabványkiadó, Budapest, 1982.

Windisch Andor: A beton minőségének ellenőrzése. Balázs György „Építőanyag praktikum” című könyvének 4.6.2. fejezete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.

Zäschke, Wolfgang: Konformitätskriterien für die Druckfestigkeit von Beton. Betonwerk + Fertigteil-Technik, 60. Jg. 1994. Heft 9. pp. 94-100.

Jelmagyarázat: ❖ A jel előtt álló fogalom a fogalomtár szócikke.

A cikk megjelent a	BETON szakmai havilap	2010. szeptember havi számának, XVIII. évf. 9. szám, 16-19. oldalán

Vissza a

Noteszlapok abc-ben **Noteszlapok tematikusan**

tartalomjegyzékhez

Vissza a Fogalmak könyvtár tartalomjegyzékéhez

Lásd még az elektronikus *Betonos^e könyv* lapjait:

http://www.betonos-e-konyv.hu/book.php?pdf=betekon-101-6-2.pdf&fb3d-page=1